FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Ouverts de $\mathbb{R}^2$, continuité

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des ouverts de $\mathbb{R}^2$?

1) $\mathbb{R}^2$
2) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
3) $[0,1]^2$
4) $[0,1[^2$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$

Exercice 2. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cup V$ et $U \cap V$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tous réels x et y, $|f(x,y)| \leq \dfrac{1}{2}\|(x,y)\|$
2) En déduire que f est continue.

Fonctions de classe C^1, dérivée directionnelle

Exercice 4. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ puis donner leur gradient en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1) $f : (x,y) \mapsto 3x^2 + 2xy - \ln(y^2+1)$
2) $f : (x,y) \mapsto e^{xy} + xy + 1$

Exercice 5. On définit la fonction « norme »

$$\begin{aligned} N : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Montrer qu'elle n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$, mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe C^1. Donner ses dérivées partielles.

Exercice 6. On définit la fonction

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

1) On pose $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée directionnelle de f suivant v au point $(0,0)$.
2) En considérant $x \mapsto f(x, x^2)$, montrer que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = h(x)$$

Règle de la chaine

Exercice 8. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $g : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 9. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Exprimer les dérivées partielles des fonctions g suivantes en fonction de celles de f :

1) $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$
2) $g(x,y) = f(xe^y, ye^x)$

Exercice 10. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Exprimer les dérivées partielles des fonctions g suivantes en fonction de celles de f :

1) $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$
2) $g(x,y) = f(y,x)$

Exercice 11. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

Calculer les dérivées partielles de g, qu'on notera $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$.

Extrema

Exercice 12. On pose $f : (x,y) \mapsto xy$.

1) Déterminer le ou les points critiques de f.
2) Montrer que f n'admet pas d'extremum local.

Exercice 13. On pose $f : (x,y) \mapsto x^2 - 3xy + 3y^2 + 1$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ puis établir qu'elle possède un unique point critique.
2) Développer $\left(x - \dfrac{3}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2$ puis conclure qu'en ce point, la fonction f admet un minimum global.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$.

1) Montrer que f n'admet pas de maximum.
2) On cherche maintenant à déterminer le ou les maxima de f, s'ils existent.
   (a) En considérant $f(-x,-y)$, montrer qu'on peut se restreindre à chercher les minima (x,y) tels que $y \geq 0$.
   (b) On suppose que f admet un minimum en un point $(x,0)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Déduire une contradiction en évaluant f en de « petites » valeurs de x, y.

   Par ce qui précède, on peut donc se restreindre à chercher les minima sur l'ouvert $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$.

   (c) Pour $y > 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x,y)$ admet un unique minimum. On notera $g(y)$ la valeur de f en ce minimum.
   (d) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que f admet un minimum. Préciser où ce minimum est atteint.
   (e) Conclure.